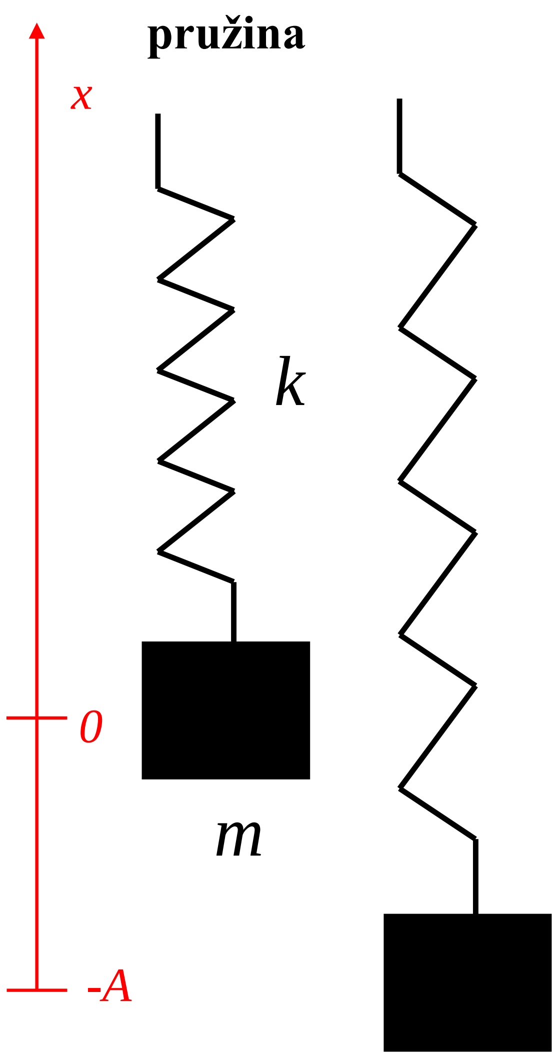
Harmonický oscilátor – pružina



$$ma_x = F_x$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ **pohybová rovnice**

$$x(t=0) = -A$$

počáteční podmínky

$$v_x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$$

Řešení:

$$x(t) = C_1 \sin\omega_1 t + C_2 \cos\omega_2 t$$

$$\dot{x}(t) = C_1\omega_1 \cos\omega_1 t - C_2\omega_2 \sin\omega_2 t$$

$$\ddot{x}(t) = -C_1\omega_1^2 \sin\omega_1 t - C_2\omega_2^2 \cos\omega_2 t$$

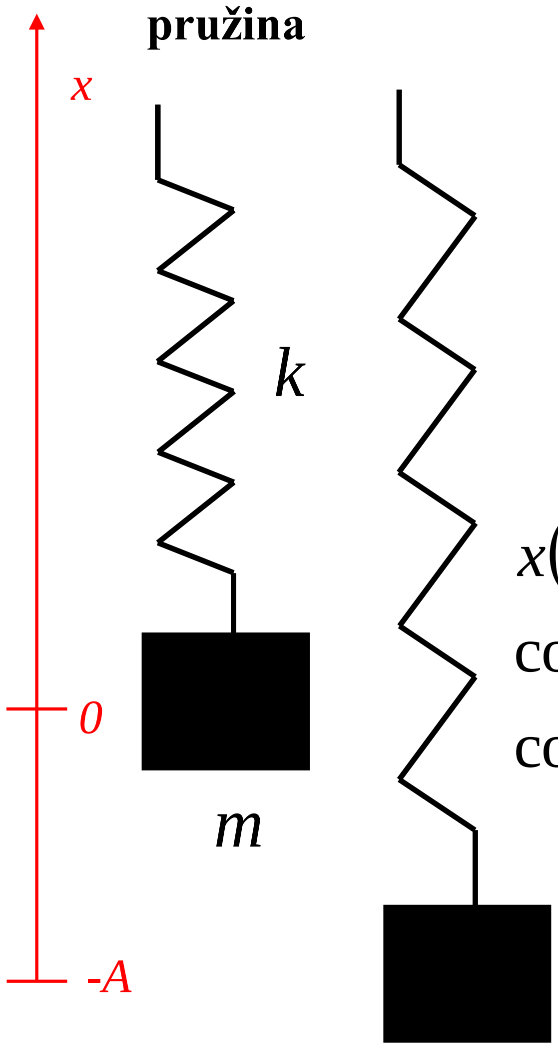
$$\omega = \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow F_x = -m\omega^2 x$$

z počátečních podmínek dostáváme: $C_1 = 0 \quad C_2 = -A$

$$x(t) = -A\cos\omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Harmonický oscilátor – pružina



$$ma_x = F_x$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ **pohybová rovnice**

$$x(t=0) = -A$$

počáteční podmínky

$$v_x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$$

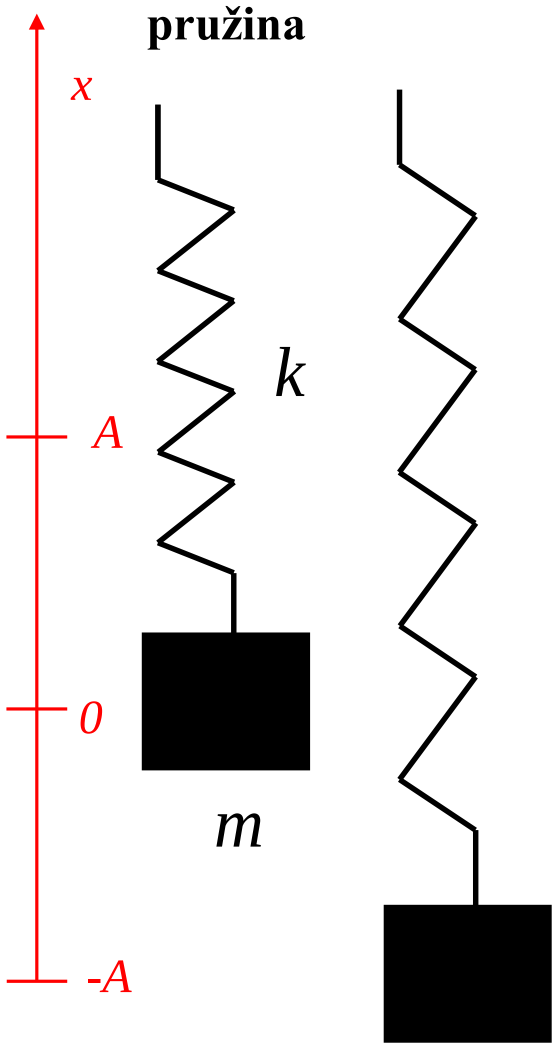
$$x(t) = x(t+T) \quad x(t) = -A\cos\omega t \quad x(t+T) = -A\cos\omega(t+T)$$

$$\cos\omega t = \cos\omega(t+T) = \cos\omega t \cdot \cos\omega T - \sin\omega t \cdot \sin\omega T \Rightarrow$$

$$\cos\omega T = 1, \quad \sin\omega T = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega T = 2\pi$$

perioda kmitů: $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Harmonický oscilátor – pružina



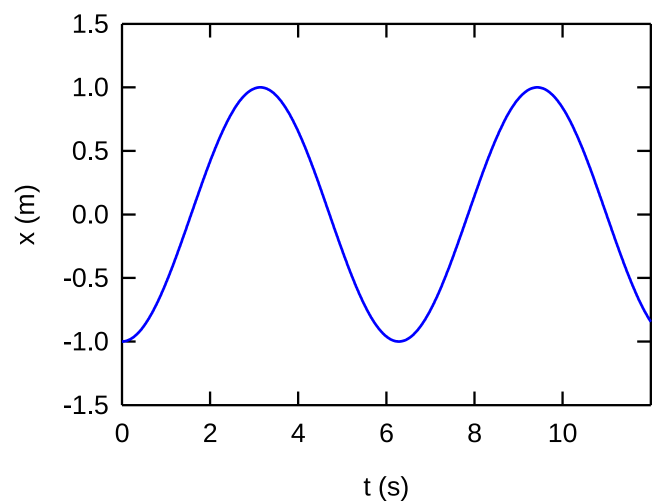
$$x(t) = -A\cos\omega t$$

$$v_x(t) = A\omega\sin\omega t$$

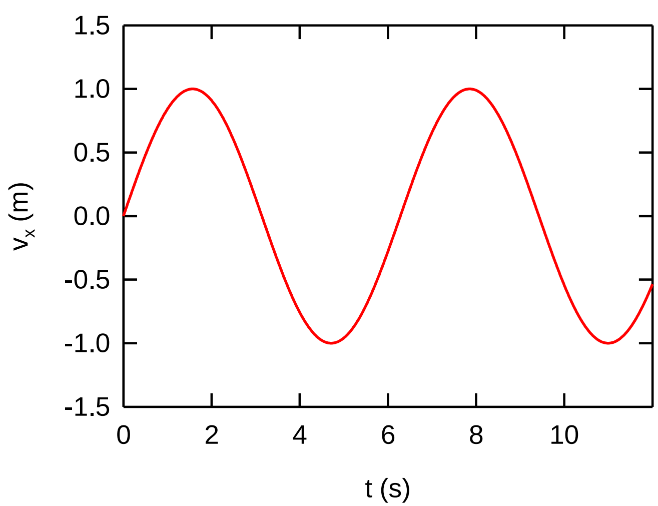
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Př. $k = 1$, $m = 1$

poloha



rychlost



Setrvačná a gravitační hmotnost

• 2. Newtonův zákon: $\vec{F} = m_s \vec{a}$

m_s – setrvačná hmotnost

= míra setrvačnosti tělesa

• Gravitační zákon: $F_g = \kappa \dfrac{m_g M_g}{r^2}$

m_g – gravitační hmotnost

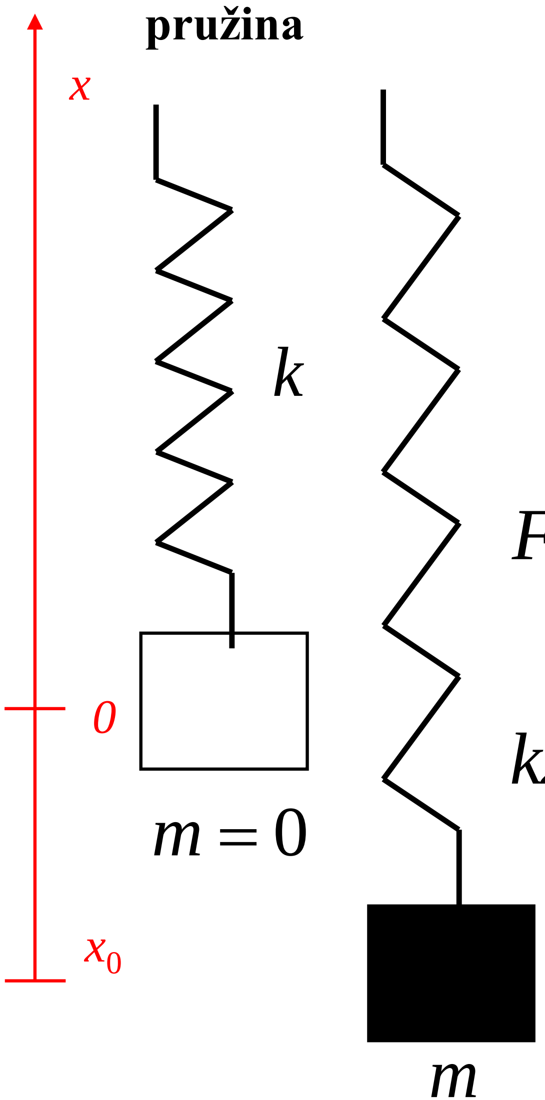
= míra velikosti gravitační síly

$$\frac{m_s}{m_g} = konst.$$

ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti

slabý princip ekvivalence

Setrvačná a gravitační hmotnost



$$ma_x = F_x$$

$$F_x = -kx$$

$$x(t) = -A\cos\omega t$$

$$F_g = \kappa\frac{m_g M_Z}{R_Z^2} = m_g g$$

$$kx_0 = \kappa\frac{m_g M_Z}{R_Z^2} = m_g g$$

$$F_x = F_g$$

***m_s* – setrvačná hmotnost**

= míra setrvačnosti tělesa

- změříme z periody kmitání pružiny

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m_s}{k}}$$

***m_g* – gravitační hmotnost**

= míra velikosti gravitační síly

- změříme z natažení pružiny

$$x_0 = \frac{\kappa}{k}\frac{m_g M_Z}{R_Z^2} = \frac{m_g g}{k}$$

Setrvačná a gravitační hmotnost

• 2. Newtonův zákon: $\vec{F} = m_s \vec{a}$

***m_s* – setrvačná hmotnost**

= míra setrvačnosti tělesa

• Gravitační zákon: $F_g = \kappa \frac{m_g M_g}{r^2}$

***m_g* – gravitační hmotnost**

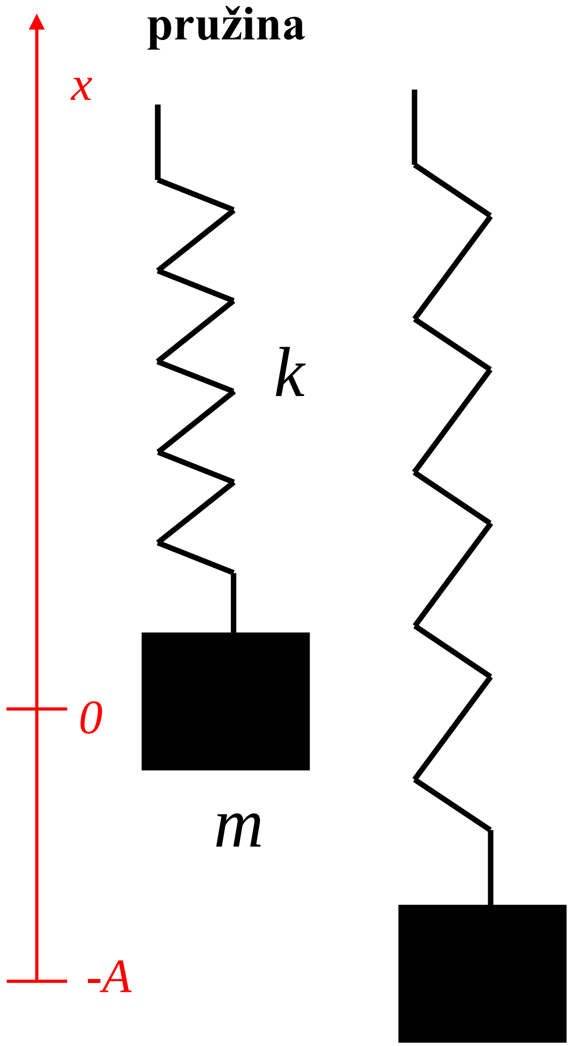
= míra velikosti gravitační síly

$$\frac{m_s}{m_g} = \frac{g}{x_0 \omega^2} = \frac{g T^2}{x_0 4\pi^2}$$

ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti

slabý princip ekvivalence

Harmonický oscilátor – pružina



$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ **pohybová rovnice**

obecné řešení:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

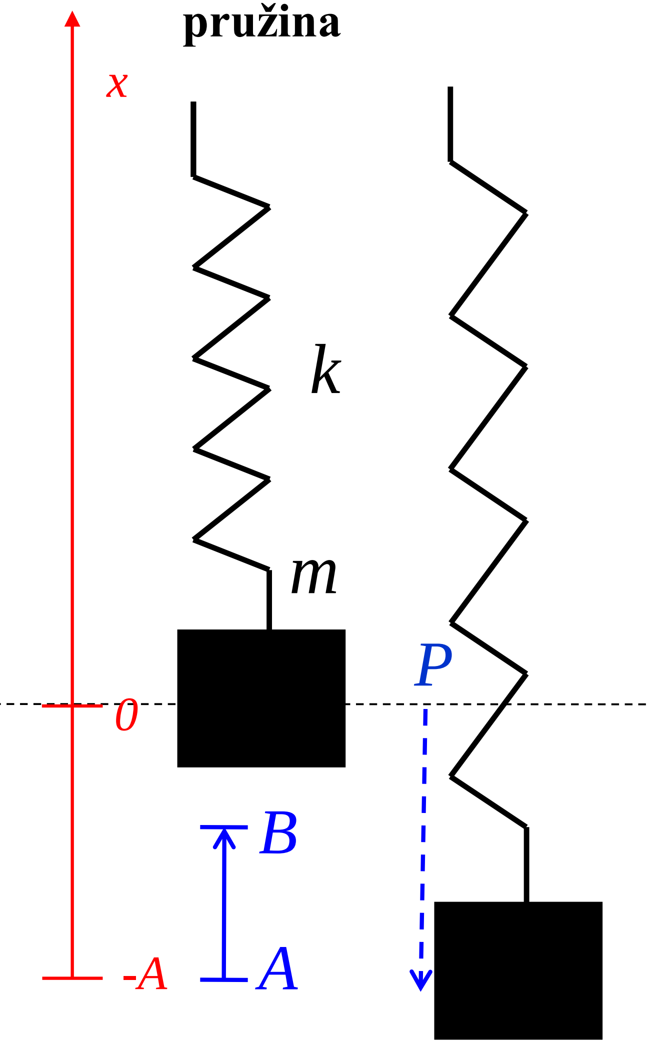
fázový posuv

$$x(t) = A\cos\varphi \sin\omega t + A\sin\varphi\cos\omega t$$

$$C_1 = A\cos\varphi, \quad C_2 = A\sin\varphi$$

$$x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2\cos\omega t$$

Harmonický oscilátor – pružina



práce, kterou vykoná pružina při přesunu závaží z A do B:

$$A_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} -kx \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

$$A_{PA} = \int_{x_P}^{x_A} -kx \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}k\left(x_A^2 - x_P^2\right) = -\frac{1}{2}k\,x_A^2$$

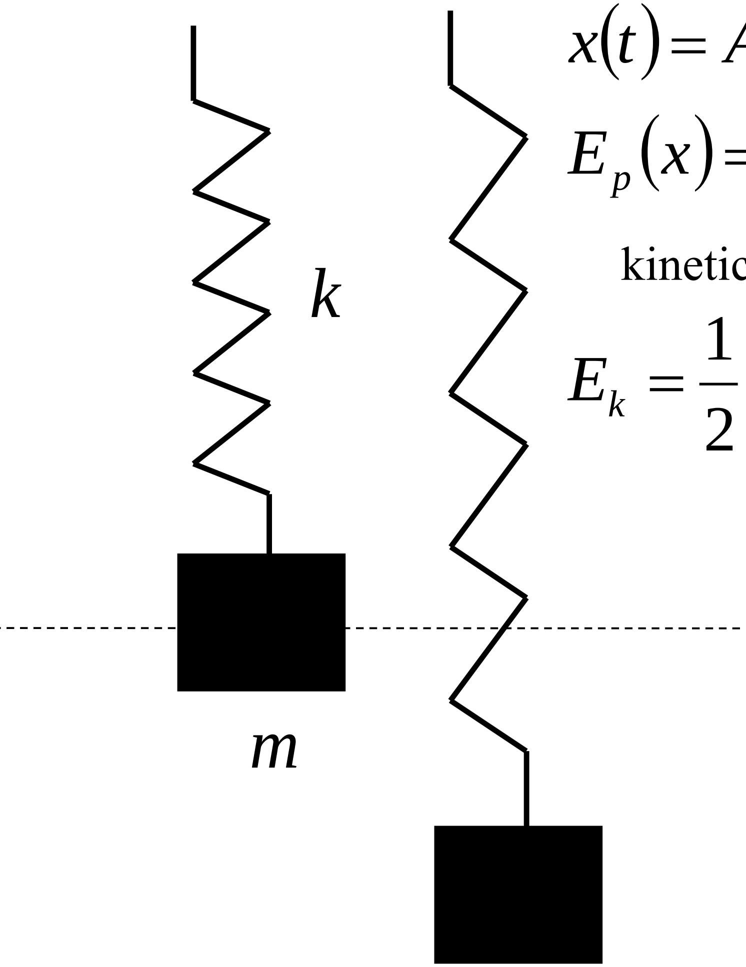
potenciální energie v bodu A: $E_p(A) = -A_{PA} = \frac{1}{2}kx_A^2$

hladina nulové potenciální energie

potenciální energie pružiny: $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$

Harmonický oscilátor – pružina

pružina



potenciální energie:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi), \quad k = m\omega^2$$

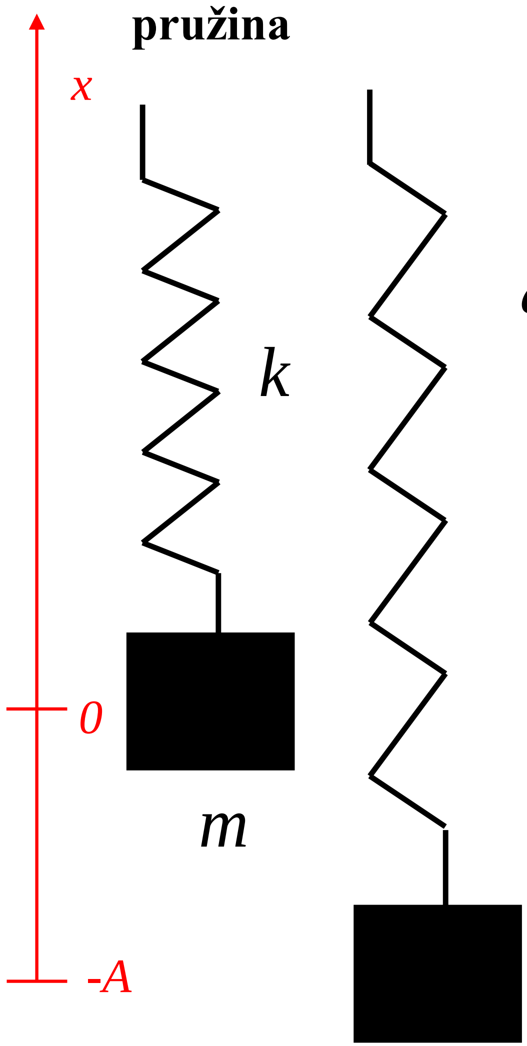
$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

kinetická energie:

$$E_k = \frac{1}{2}mv_x{}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

celková energie : $E_M = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$

Tlumené kmity



Tlumící (odporová) síla:

$$F_x = -h\dot{x}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

Pohyboá rovnice:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{h}{m}\dot{x}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x}$$

řešení hledáme ve tvaru: $x = Ce^{\alpha t}$

$$C\alpha^2 e^{\alpha t} = -\omega_0^2 Ce^{\alpha t} - 2\delta C\alpha e^{\alpha t}$$

charakteristická rovnice: $\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 \qquad \alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

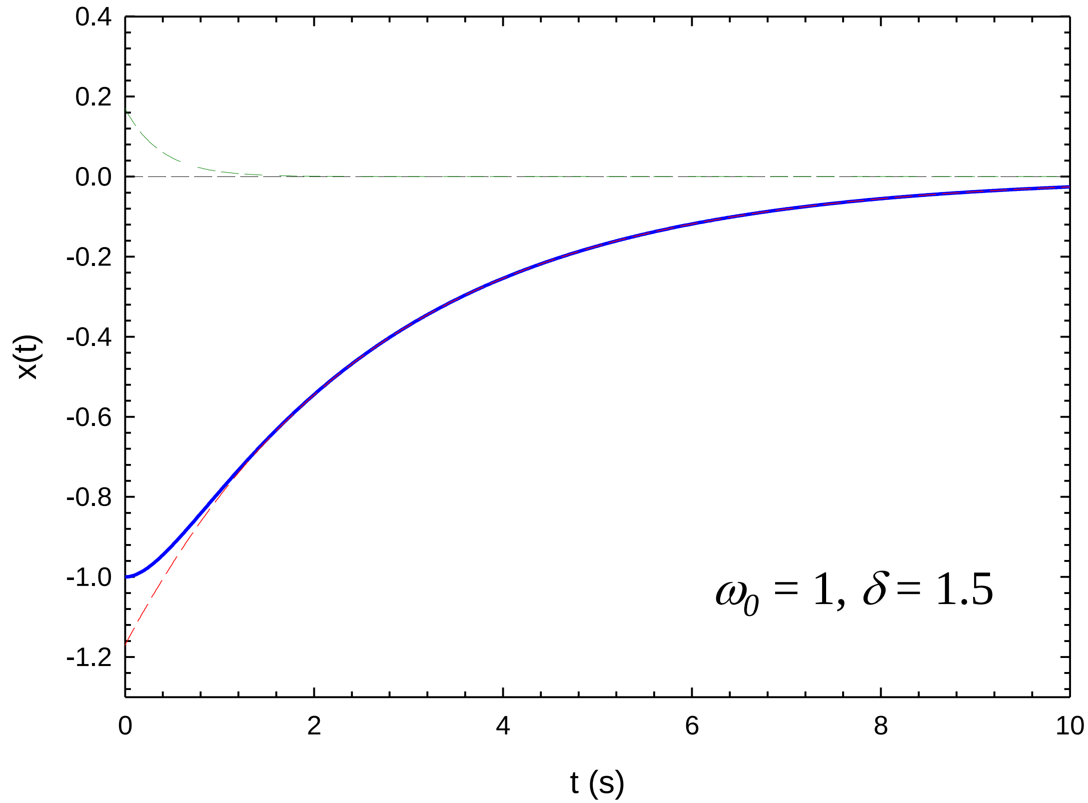
Tlumené kmity – aperiodický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta \dot{x}$$

aperiodický pohyb: $D > 0 \Rightarrow \delta > \omega_0$

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$



konstanty C_1, C_2 určíme z počátečních podmínek:

např. $x(0) = -A \qquad C_1 + C_2 = -A$

$\dot{x}(0) = 0 \qquad C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 = 0$

$$C_1 = \frac{A\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$C_2 = \frac{-A\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$x = \frac{A\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} - \frac{A\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t}$$

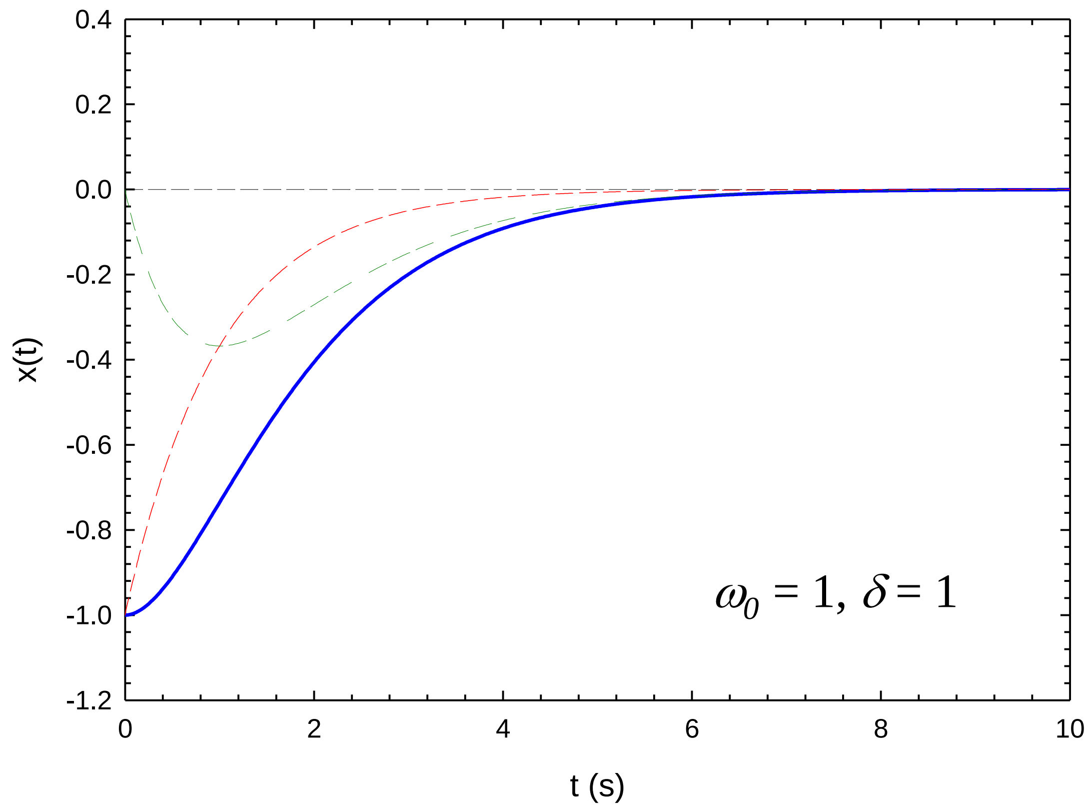
Tlumené kmity – mezní aperiodický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta \dot{x}$$

mezní aperiodický pohyb: $D = 0$

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}$$

$$\alpha = -\delta$$



konstanty C_1, C_2 určíme z počátečních podmínek:

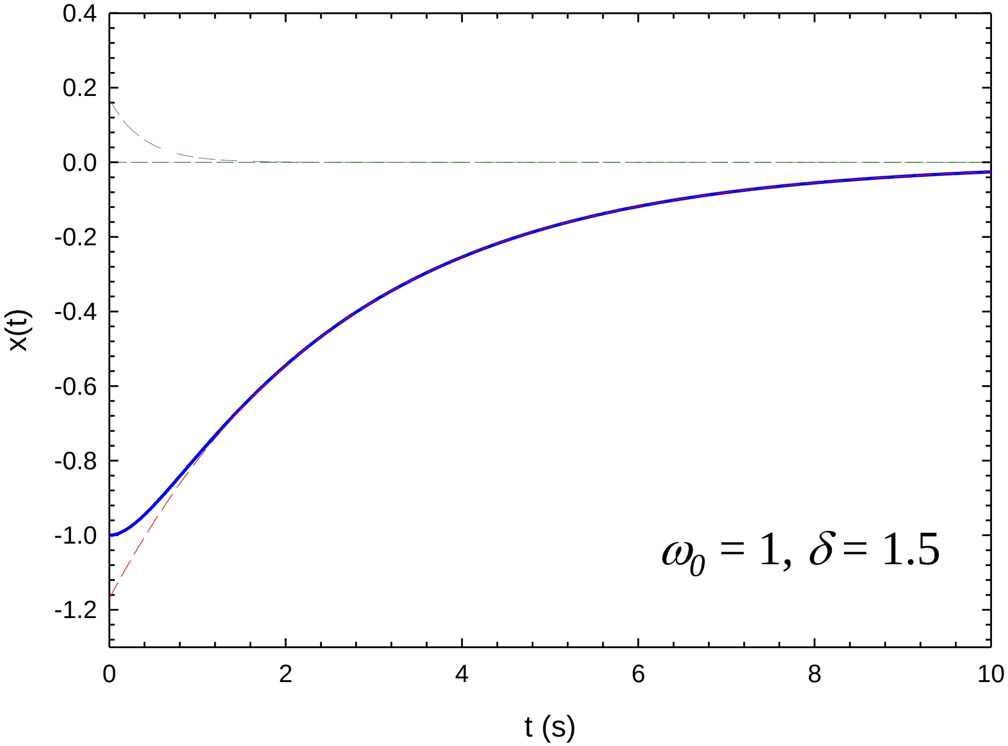
např. $x(0) = -A \qquad C_1 = -A \qquad C_2 = A\alpha$

$\dot{x}(0) = 0 \qquad C_1\alpha + C_2 = 0$

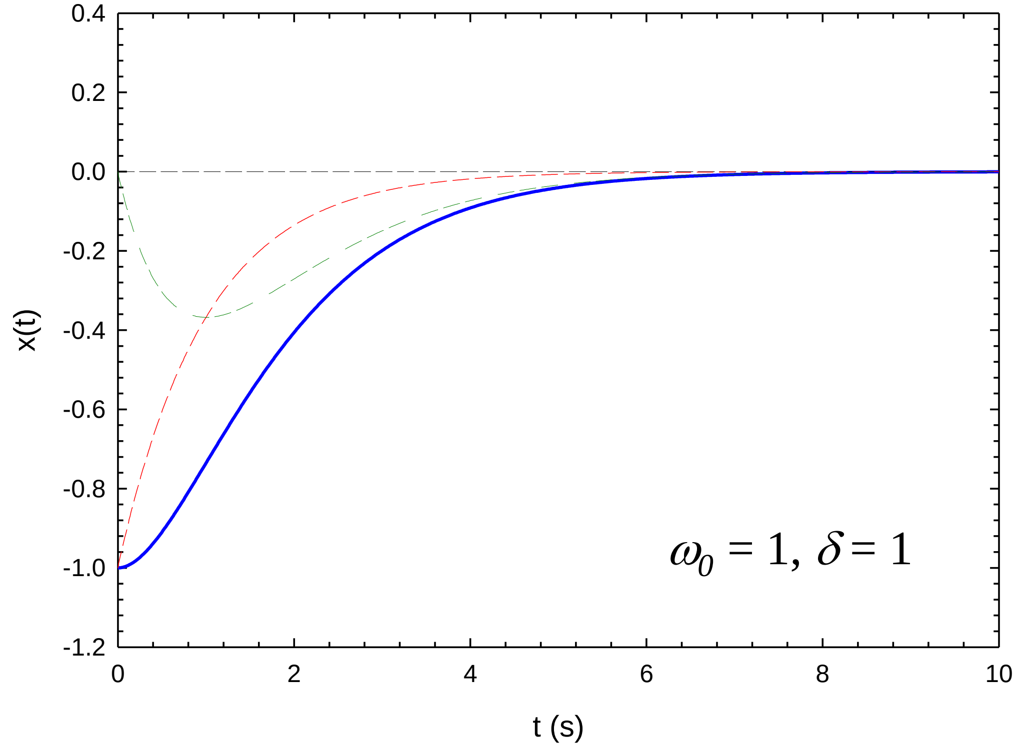
$$x = -Ae^{-\delta t} - A\delta t e^{-\delta t} = -Ae^{-\delta t}(1 + \delta t)$$

Tlumené kmity

aperiodický pohyb



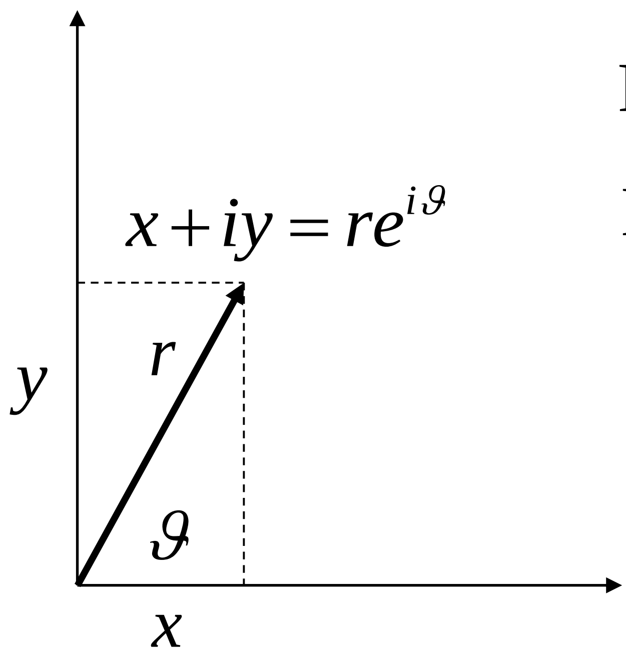
mezní aperiodický pohyb



Komplexní čísla

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

$$c = x + iy = re^{i\vartheta} = r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta$$



$$\mathrm{Re}\{c\} = x = r\cos\vartheta$$

$$\mathrm{Im}\{c\} = y = r\sin\vartheta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{y}{x}$$

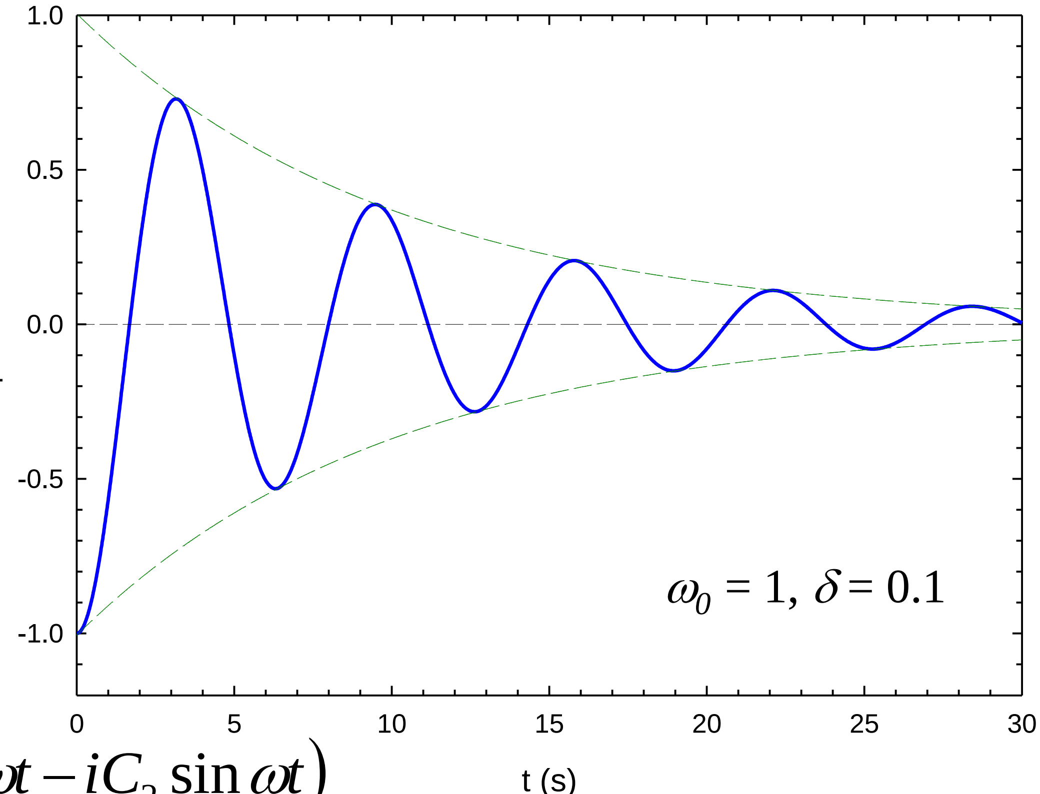
$$c^* = x - iy = r\cos\vartheta - ir\sin\vartheta$$

$$c \cdot c^* = x^2 + y^2 = r^2$$

Tlumené kmity – tlumený harmonický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta \dot{x} \qquad D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

tlumený harmonický pohyb: $D < 0$



$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}_{\omega}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega$$

$$x = C_1 e^{-\delta t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega t}$$

$$x = e^{-\delta t}\left(C_1 \cos\omega t + iC_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t - iC_2 \sin\omega t\right)$$

$$x = e^{-\delta t}\left(D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t\right)$$

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= C_1 + C_2 \\ D_2 &= i\left(C_1 - C_2\right) \end{aligned}\right\} \quad C_2 = C_1^*$$

$$x = A_T e^{-\delta t} \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

$$\dot{x} = A_T e^{-\delta t}\left[-\delta \sin\left(\omega t + \varphi\right) + \omega \cos\left(\omega t + \varphi\right)\right]$$

Konstanty A, φ určíme z počátečních podmínek např.:

$$x(0) = -A \quad \dot{x}(0) = 0 \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\delta} \qquad A_T = \frac{-A}{\sin\varphi}$$

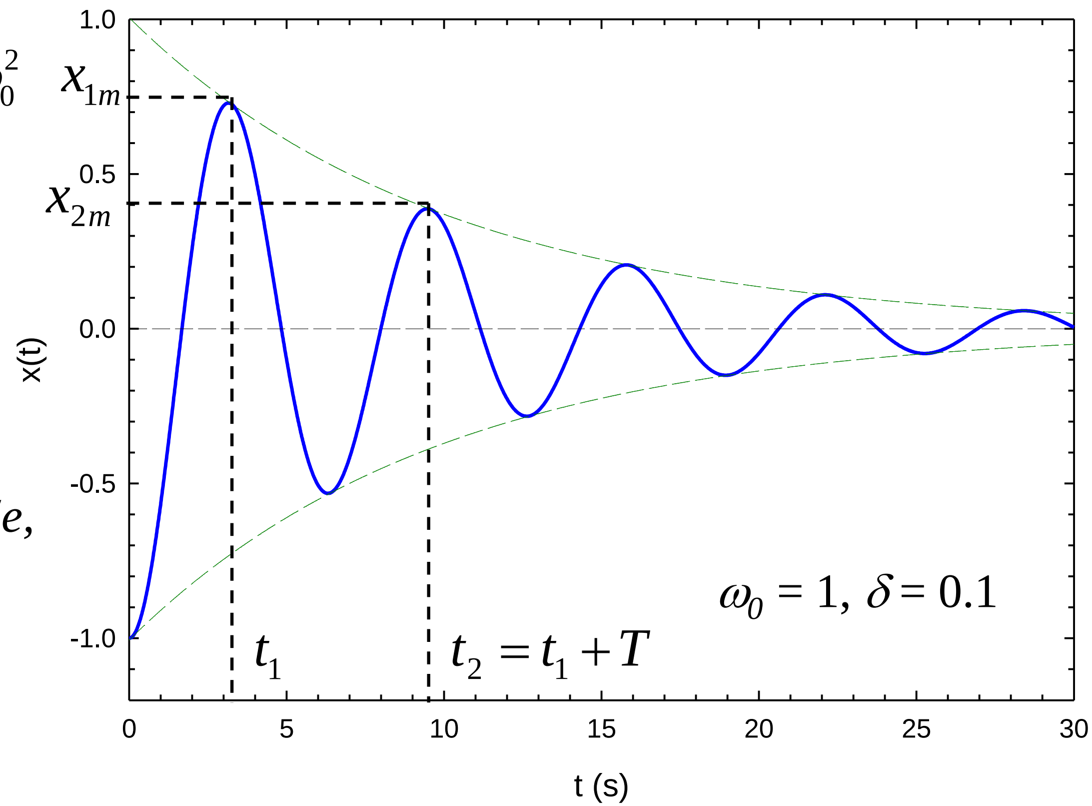
Tlumené kmity – tlumený harmonický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta \dot{x}$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

tlumený harmonický pohyb: $D < 0$

$$x = A_T e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$



Dobu za kterou obálka kmitu klesne na A_T/e, nazýváme relaxační dobou :

$$x' = A_T e^{-\delta t}$$

$$A_T / e = A_T e^{-\delta \tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\delta}$$

Poměr dvou po sobě následujících maxim nazýváme útlumem kmitů:

$$\beta = \frac{x_{1m}}{x_{2m}} = \frac{A_T e^{-\delta t_1} \sin(\omega t_1 + \alpha)}{A_T e^{-\delta(t_1+T)} \sin(\omega(t_1 + T) + \alpha)} = e^{\delta T}$$